МЕХАНИКА
MECHANICS

УДК:517.95, 519.6
https://doi.org/10.23947/1992-5980-2018-18-4-350-361

Построение и исследование корректности математической модели транспорта и осаждения взвесей с учетом изменения рельефа дна[*]

А. И. Сухинов[1], В. В. Сидорякина[2]**
[1] Донской государственный технический университет, г. Ростов-на-Дону, Российская Федерация
[2] Таганрогский институт имени А. П. Чехова (филиал) РГЭУ (РИНХ), г. Таганрог, Российская Федерация

Development and correctness analysis of the mathematical model of transport and suspension sedimentation depending on bottom relief variation [***]

A. I. Sukhinov[1], V. V. Sidoryakina[2]**
[1] Don State Technical University, Rostov-on-Don, Russian Federation
[2] Taganrog Chekhov Institute, Rostov State University of Economics (RINH) branch, Taganrog, Russian Federation

Введение. Настоящая работа посвящена исследованию пространственно-трехмерной модели транспорта и осаждения взвеси в прибрежной зоне с учетом изменения рельефа дна. Модель учитывает следующие процессы: адвективный перенос, обусловленный движением водной среды, микротурбулентную диффузию и гравитационное осаждение частиц взвеси, а также изменение геометрии дна, вызванное осаждением частиц взвеси или подъемом частиц донных отложений.
Целью работы являлось проведение аналитического исследования корректности начально-краевой задачи, соответствующей построенной модели.
Материалы и методы. Изменение рельефа дна приводит к необходимости решать начально-краевую задачу для уравнения параболического типа с младшими производными в области, геометрия которой зависит от искомой функции решения, что приводит, в общем случае, к нелинейной постановке задачи. Выполнена линеаризация модели на временной сетке за счет «замораживания» рельефа дна в пределах одного шага по времени и последующего пересчета функции поверхности дна на основе изменившейся функции концентрации взвешенного вещества, а также возможного изменения вектора скорости движения водной среды.
Результаты исследования. Для линеаризованной задачи построен квадратичный функционал и энергетическим методом доказана единственность решения соответствующей начально-краевой задачи в пределах произвольного шага по времени. На основе преобразования квадратичного функционала получена априорная оценка нормы решения в функциональном пространстве L_2 в зависимости от интегральных оценок по времени правой части, граничных условий и начального условия, и, таким образом, доказана устойчивость решения исходной задачи при из-

Introduction. The paper is devoted to the study on the three-dimensional model of transport and suspension sedimentation in the coastal area due to changes in the bottom relief. The model considers the following processes: advective transfer caused by the aquatic medium motion, micro-turbulent diffusion, and gravity sedimentation of suspended particles, as well as the bottom geometry variation caused by the particle settling or bottom sediment rising. The work objective was to conduct an analytical study of the correctness of the initial-boundary value problem corresponding to the constructed model.
Materials and Methods. The change in the bottom relief aids in solution to the initial-boundary value problem for a parabolic equation with the lowest derivatives in a domain whose geometry depends on the desired function of the solution, which in general leads to a nonlinear formulation of the problem. The model is linearized on the time grid due to the “freezing” of the bottom relief within a single step in time and the subsequent recalculation of the bottom surface function on the basis of the changed function of the suspension concentration, as well as a possible change in the velocity vector of the aquatic medium.
Research Results. For the linearized problem, a quadratic functional is constructed, and the uniqueness of the solution to the corresponding initial boundary value problem is proved within the limits of an unspecified time step. On the basis of the quadratic functional transformation, we obtain a prior estimate of the solution norm in the functional space L2 as a function of the integral time estimates of the right side, and the initial condition. Thus, the stability of the solution to the initial

[*] Работа выполнена по теме № 2.6905.2017/БЧ в рамках госзадания Минобрнауки России в части НИР
[**] E-mail: sukhinov@gmail.com, cvv9@mail.ru
[***] The research is done on theme no. 2.6905.2017/БЧ within the frame of the government task of RF Ministry of Education and Science in R&D.

менении начального и граничных условий, функции правой части.
Обсуждение и заключения. Модель может представлять ценность при прогнозе распространения загрязнений и изменения рельефа дна, как при антропогенном воздействии, так и в силу естественно протекающих природных процессов в прибрежной зоне.

problem from the change of the initial and boundary conditions, the right-hand side function, is established.
Discussion and Conclusions. The model can be of value for predicting the spread of contaminants and changes in the bottom topography, both under an anthropogenic impact and due to the natural processes in the coastal area.

Ключевые слова: прибрежные системы, математическая модель, задачи диффузии-конвекции осаждения взвешенного вещества, изменение рельефа дна, единственность решения и устойчивость начально-краевой задачи.

Keywords: coastal systems, mathematical model, diffusion-convection problems of suspension sedimentation, bottom relief change, uniqueness of solution, and stability of initial-boundary value problem.

Образец для цитирования: Сухинов, А. И. Построение и исследование корректности математической модели транспорта и осаждения взвесей с учетом изменения рельефа дна / А. И. Сухинов, В. В. Сидорякина // Вестник Дон. гос. техн. ун-та. — 2018. — Т. 18, № 4. — С.350−361. https://doi.org/10.23947/1992-5980-2018-18-4-350-361

For citation: A.I. Sukhinov, V.V. Sidoryakina.. Development and correctness analysis of the mathematical model of transport and suspension sedimentation depending on bottom relief variation. Vestnik of DSTU, 2018, vol. 18, no. 4, pp.350−361. https://doi.org/10.23947/1992-5980-2018-18-4-350-361

Введение. Среди факторов, определяющих комплексное развитие исследований прибрежных территорий, большое значение принадлежит охране водной среды [1−2]. Устранение последствий естественных процессов, таких как загрязнение, заиление и истощение акваторий приводит к необходимости изучения всех аспектов, влияющих на изменение прибрежных акваторий. Поддержание водных объектов в надлежащем состоянии и своевременное вмешательство в режим его функционирования напрямую связано с увеличением портовых мощностей и обеспечением эффективного развития прибрежной инфраструктуры (обеспечение подхода к причалам судов с низкой посадкой, очистка от ила и водной растительности прибрежной полосы и пр.) [3−5]. Как правило, проведение исследований в данной области требует построения математических моделей, максимально приближенных к реальным процессам [6−11].

В работе рассматривается непрерывная математическая модель, описывающая пространственно-трехмерные процессы, связанные с транспортом и гравитационным осаждением взвесей в водной среде с изменяющимся рельефом дна. Эта модель учитывает микротурбулентую диффузию и адвективный перенос взвесей, действие на частицы взвеси силы тяжести, наличие дна и свободной поверхности, изменение рельефа дна. Модель транспорта взвеси позволяет проводить исследования гидрофизических процессов водных систем, осуществлять прогноз динамики изменения донной поверхности на основе описания процессов подъема, переноса, осаждения, изменения концентрации взвеси [12−13]. Доказана единственность решения соответствующей начально-краевой задачи и получена априорная оценка нормы решения в зависимости от интегральных оценок правой части, граничных условий и начального условия.

Материалы и методы. Непрерывная 3D модель диффузии-конвекции взвеси и соответствующая ей начально-краевая задача. Рассмотрим непрерывную математическую модель распространения взвеси в водной среде, учитывающую диффузию и конвекцию взвеси, действие на взвеси силы тяжести, наличие дна и свободной поверхности. Будем использовать прямоугольную декартовую систему координат $Oxyz$, где ось Ox проходит по невозмущенной водной поверхности и направлена в сторону моря, ось Oz направлена вертикально вниз. Пусть $h=H+\eta$ — общая глубина акватории, м; H— глубина при невозмущенной поверхности водоема, м; η — возвышение свободной поверхности относительно геоида (уровня моря), м (рис. 1).

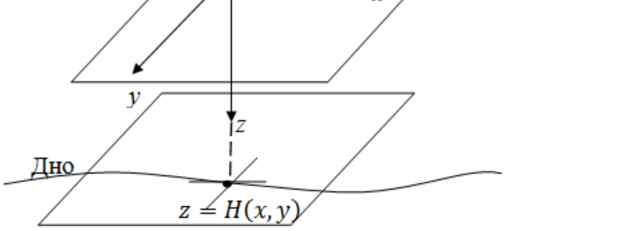


Рис. 1. Введение системы координат $Oxyz$

Пусть в замыкании области $\bar{G} = \{0 \le x \le L_x, 0 \le y \le L_y, 0 \le z \le H(x,y)\}$ находятся частицы взвеси, которые в точке (x,y,z) и в момент времени t имеют концентрацию $c = c(x,y,z,t)$, мг/л; t — временная переменная, сек. Также далее будем использовать обозначение $L_z \equiv \max\limits_{0\le x\le L_x,\, 0\le y\le L_y} H(x,y)$.

Поведение частиц взвеси будет описано следующей системой уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial c}{\partial t} + \dfrac{\partial (uc)}{\partial x} + \dfrac{\partial (vc)}{\partial y} + \dfrac{\partial \left((w + w_g) c \right)}{\partial z} = \mu_h \left(\dfrac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 c}{\partial y^2} \right) + \dfrac{\partial}{\partial z} \left(\mu_v \dfrac{\partial c}{\partial z} \right) + F, \\ \dfrac{\partial H}{\partial t} = -\dfrac{\varepsilon}{\rho} w_g c, \end{cases} \quad (1)$$

где u, v, w — компоненты вектора $\vec{U}$ скорости движения жидкости, м/сек; w_g — гидравлическая крупность или скорость осаждения частиц, м/сек; μ_h, μ_v — коэффициенты горизонтальной и вертикальной турбулентной диффузии частиц соответственно, м^2/сек; F — мощность источников частиц; ε — пористость донных материалов.

Слагаемые в левой части (кроме производной по времени) первого уравнения системы (1) описывают адвективный перенос частиц, обусловленный инерционным движением водной среды, а также осаждение под действием силы тяжести. Слагаемые в правой части описывают диффузию взвеси. Коэффициент вертикальной диффузии выбран отличным от коэффициента горизонтальной диффузии в связи с тем, что эффект различия этих коэффициентов часто наблюдается в различных средах и может быть вызван различными факторами.

В качестве области G рассматриваем «скошенный» к берегу «параллелепипед» $ABCDA_1OC_1D_1$, верхнее основание $A_1OC_1D_1$ которого лежит на свободной поверхности $(z = 0)$, а нижним основанием $ABCD$ является часть поверхности дна $(z = H(x,y))$. Пусть S — поверхность $\bar{G}$, $\vec{n}$ — внешняя нормаль к поверхности «скошенного параллелепипеда». Будем считать заданной $\overrightarrow{U^*}$ — скорость движения жидкости на боковых поверхностях $\bar{G}$. В совокупности с граничными условиями первого рода для функции концентрации частиц это позволяет определять потоки взвешенного вещества как по направлению к берегу, так и вдоль берега (рис. 2).

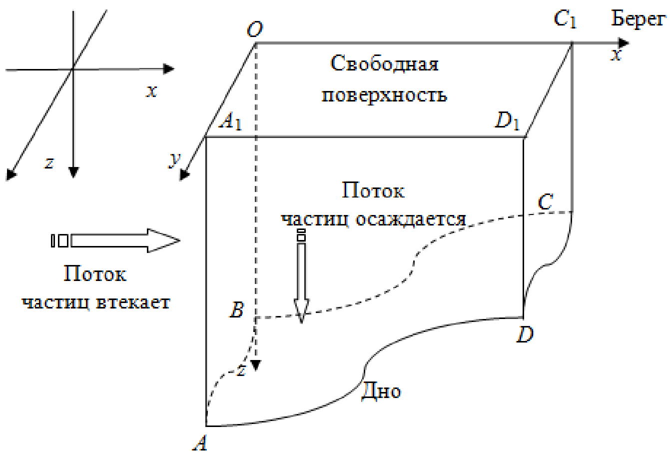


Рис. 2. Область решения задачи транспорта взвеси

Добавим к системе (1) начальные и граничные условия (предполагая, что осаждение частиц на дно необратимо).

В качестве начальных условий при времени $t = 0$ принимаем

$$c(x,y,z,0) \equiv c_0(x,y,z); \quad (2)$$

$$H(x,y,0) = H_0(x,y). \quad (3)$$

Граничные условия задаем на гранях $ABCDA_1OC_1D_1$ (задаем потоки взвесей как по направлению к берегу, так и вдоль берега):

— на гранях $S_1 \equiv AA_1OB$ $(x = 0,\ 0 \le y \le L_y,\ \ 0 \le z \le L_z)$, $S_2 \equiv AA_1D_1D$ $(y = L_y,\ 0 \le x \le L_x,\ 0 \le z \le L_z)$ и $S_3 \equiv BOC_1C$ $(y = 0,\ 0 \le x \le L_x,\ 0 \le z \le L_z)$

$$c = c^*,\ \text{где}\ c^* = c^*(x,y,z,t),\quad t \in [0,T]; \tag{4}$$

— на гранях $S_4 \equiv DD_1C_1C\ \ (x = L_x,\ 0 \le y \le L_y,\ \ 0 \le z \le L_z)$ и $S_5 \equiv A_1OC_1D_1\ \ (z = 0,\ 0 \le x \le L_x,\ \ 0 \le y \le L_y)$

$$c = 0; \tag{5}$$

— на поверхности $S_6 \equiv ABCD\ \ (z = H(x,y,t),\ 0 \le x \le L_x,\ \ 0 \le y \le L_y)$

$$\frac{\partial c}{\partial n} = -\frac{w_g}{\mu_v}c\ \text{ или }\ \frac{\partial c}{\partial z} = -\frac{w_g}{\mu_v}c\,. \tag{6}$$

Граничное условие (5) имеет место при относительно небольших уклонах дна:

$$\max_{S_6}\sqrt{\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial y}\right)^2} \ll 1.$$

Следующее условие невырожденности области решения задаем для всех (x,y,t) при которых поставлена начально-краевая задача:

$$H(x,y,t) \ge h_0 \equiv const > 0, \qquad 0 \le t \le T. \qquad (7)$$

При исследовании объединенных моделей транспорта наносов и взвесей возможно увеличение концентрации взвешенных частиц в придонном слое за счет подъема частиц донных отложений при превышении сдвигового напряжения некоторого критического значения [13−16]. Тогда вместо граничного условия (6) будем рассматривать граничное условие вида

$$\frac{\partial c}{\partial z} = \alpha c, \quad \alpha = const > 0. \quad (8)$$

Линеаризация начально-краевой задачи транспорта и осаждения взвесей. Для того чтобы создать линеаризованную модель на временном отрезке $0 \le t \le T$ построим равномерную сетку ω_τ с шагом τ, т. е. множество точек $\omega_\tau = \{t_n = n\tau,\ n = 0,1,...,N,\ N\tau = T\}$.

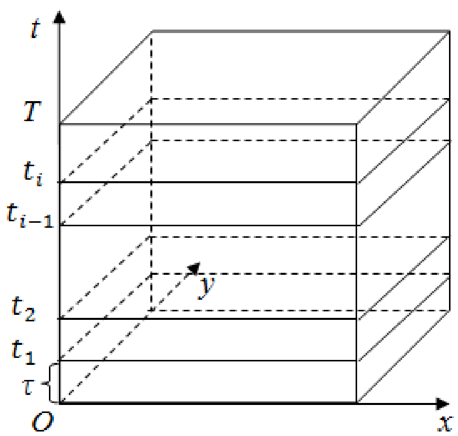


Рис. 3. Построение временной сетки

Функции $c^{(n)}(x,y,z,t_{n-1})$ и $H^{(n)}(x,y,t_{n-1})$ определяем на каждом шаге временной сетки ω_τ. Если $n = 1$, то в качестве $c^{(1)}(x,y,z,t_0)$, $H^{(1)}(x,y,t_0)$ достаточно взять функции начального условия, т. е. $c^{(1)}(x,y,z,0) \equiv c_0(x,y,z)$, $H^{(1)}(x,y,t_0) \equiv H_0(x,y)$ соответственно. Если же $n = 2,...,N$, то функции $c^{(n)}(x,y,z,t_{n-1}) = c^{(n-1)}(x,y,z,t_{n-1})$ предполагаются известными, поскольку предполагается решенной задача (1)−(6) для предыдущего временного промежутка $t_{n-2} < t \le t_{n-1}$.

Систему (1) на промежутке $t_{n-1} < t \le t_n$ запишем в виде:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial c^{(n)}}{\partial t} + \dfrac{\partial\left(uc^{(n)}\right)}{\partial x} + \dfrac{\partial\left(vc^{(n)}\right)}{\partial y} + \dfrac{\partial\left(\left(w + w_g\right)c^{(n)}\right)}{\partial z} = \mu_h\left(\dfrac{\partial^2 c^{(n)}}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 c^{(n)}}{\partial y^2}\right) + \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\mu_v\dfrac{\partial c^{(n)}}{\partial z}\right) + F, \\ \dfrac{\partial H^{(n)}}{\partial t} = -\dfrac{\varepsilon}{\rho}w_g c^{(n)} \end{cases} \tag{9}$$

и дополним ее начальными условиями:

$$c^{(1)}(x,y,z,t_0)=c_0(x,y,z), c^{(n)}(x,y,z,t_{n-1})=c^{(n-1)}(x,y,z,t_{n-1}),\quad n=2,...,N. \quad (10)$$

$$H^{(1)}(x,y,t_0)=H_0(x,y), H^{(n)}(x,y,t_{n-1})=H^{(n-1)}(x,y,t_{n-1}),\quad n=2,...,N. \quad (11)$$

Граничные условия (4)−(6) предполагаются выполненными для всех промежутков времени $t_{n-1}\le t\le t_n$.

Определив функцию $c^{(n)}(x,y,z,t_{n-1})=c^{(n-1)}(x,y,z,t_{n-1})$ на временном промежутке $t_{n-1}<t\le t_n$, можно найти функцию $H^{(n)}(x,y,t_{n-1})$. С этой целью проинтегрируем обе части второго уравнения системы (9) по переменной $t_{n-1}\le t\le t_n$. Получим

$$\int_{t_{n-1}}^{t_n}\frac{\partial H^{(n)}}{\partial t}dt=-\frac{\varepsilon}{\rho}w_g\int_{t_{n-1}}^{t_n}c^{(n)}dt. \quad (12)$$

Из равенства (12) нетрудно получить

$$H^{(n)}=H^{(n-1)}-\frac{\varepsilon}{\rho}w_g\sum_{n=1}^{N}\int_{t_{n-1}}^{t_n}c^{(n)}dt. \quad (13)$$

Введем на каждом временном шаге $t_{n-1}\le t\le t_n$ область $G_{n-1}=\left\{0<x<L_x, 0<y<L_y, 0<z<H^{n-1}(x,y,t_{n-1})\right\}$.

Имеем цепочку линейных начально-краевых задач для каждого временного слоя, где для промежутка $t_{n-1}\le t\le t_n$ рассматривается система вида

$$\begin{cases}\dfrac{\partial c^{(n)}}{\partial t}+\dfrac{\partial\left(uc^{(n)}\right)}{\partial x}+\dfrac{\partial\left(vc^{(n)}\right)}{\partial y}+\dfrac{\partial\left(\left(w+w_g\right)c^{(n)}\right)}{\partial z}=\mu_h\left(\dfrac{\partial^2c^{(n)}}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2c^{(n)}}{\partial y^2}\right)+\dfrac{\partial}{\partial z}\left(\mu_v\dfrac{\partial c^{(n)}}{\partial z}\right)+F, & (14)\\ (x,y,z)\in G_{n-1},\quad G_{n-1}=\left\{0<x<L_x,\ 0<y<L_y,\ 0<z<H^{n-1}(x,y,t_{n-1})\right\}, \\ H^{(n)}=H^{(n-1)}-\dfrac{\varepsilon}{\rho}w_g\displaystyle\sum_{n=1}^{N}\int_{t_{n-1}}^{t_n}c^{(n)}dt,\quad n=1,2,...,N. & (15)\end{cases}$$

с начальными условиями:

$$c^{(n)}(x,y,z,t_{n-1})=c^{(n-1)}(x,y,z,t_{n-1}), \quad (16)$$

$$H^{(n)}(x,y,t_{n-1})=H^{(n-1)}(x,y,t_{n-1}). \quad (17)$$

Отметим, что на каждом временном шаге граничные поверхности будут меняться (исключение грань S_5). Рассматривая временной промежуток $t_{n-1}\le t\le t_n$, осуществляем задание граничных условий на гранях области G_{n-1}:

— на гранях $S_{1,n-1}\left(x=0,\ 0\le y\le L_y,\quad 0\le z\le H^{(n-1)}(0,y,t_{n-1})\right)$ $S_{2,n-1}\left(y=L_y,\ 0\le x\le L_x,\ 0\le z\le H^{(n-1)}(x,L_y,t_{n-1})\right)$ и $S_{3,n-1}\left(y=0,\ 0\le x\le L_x,\ 0\le z\le H^{(n-1)}(x,0,t_{n-1})\right)$

$$c^{(n)}=c^*,\ \text{где}\ c^*=c^*(x,y,z,t),\quad t\in[t_{n-1},t_n]; \quad (18)$$

— на гранях

$S_{4,n-1}\left(x=L_x,\ 0\le y\le L_y,\quad 0\le z\le H^{(n-1)}(L_x,y,t_{n-1})\right)$

и $S_{5,n-1}\left(z=0,\ 0\le x\le L_x,\quad 0\le y\le L_y\right)\equiv A_1OC_1D_1$

$$c^{(n)}=0; \quad (19)$$

— на поверхности $S_{6,n-1}\left(z=H^{(n-1)}(x,y,t_{n-1}),\ 0\le x\le L_x,\quad 0\le y\le L_y\right)$

$$\frac{\partial c^{(n)}}{\partial n}=-\frac{w_g}{\mu_v}c^{(n)}\ \text{или}\ \frac{\partial c^{(n)}}{\partial z}=-\frac{w_g}{\mu_v}c^{(n)}. \quad (20)$$

Граничное условие (8) заменится на следующее

$$\frac{\partial c^{(n)}}{\partial z}=\alpha c^{(n)},\quad \alpha=const>0. \quad (21)$$

Таким образом, предполагается, что рельеф дна в пределах данного временного шага при расчете распределения концентраций взвешенного вещества не меняется и берется из предыдущего временного слоя. В первую очередь на данном временном шаге $t_{n-1} \le t \le t_n$ решается начально-краевая задача для уравнения конвекции-диффузии (14) с зафиксированной функцией рельефа дна $H^{(n-1)}$, а уже затем выполняется обновление (пересчет) функции рельефа $H^{(n)}$ в соответствии с равенством (15). Определение условий существования, единственности и непрерывной зависимости решения от входных данных задачи проводится на фиксированном временном слое в этих предположениях и при условии выполнения условия (7).

Авторы не планируют исследовать в данной работе существование решений начально-краевых задач (14)−(20) и (14)−(19), (21). Вопросы существования решений начально-краевых задач для уравнений параболического типа с младшими производными (уравнений диффузии-конвекции) рассмотрены, например, в монографиях [17−18].

Результаты исследования. Исследование единственности решения начально-краевой задачи транспорта взвеси.

Рассмотрим начально-краевую задачу (14)−(20), сформулированную для произвольного временного слоя $t_{n-1} < t \le t_n$.

Умножим левую и правую часть уравнения (14) на функцию $c^{(n)}$ и получим:

$$\frac{\partial c^{(n)}}{\partial t} + \frac{\partial\left(uc^{(n)}\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(vc^{(n)}\right)}{\partial y} + \frac{\partial\left(\left(w+w_g\right)c^{(n)}\right)}{\partial z} = \mu_h c^{(n)}\left(\frac{\partial^2 c^{(n)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c^{(n)}}{\partial y^2}\right) + c^{(n)}\frac{\partial}{\partial z}\left(\mu_\nu \frac{\partial c^{(n)}}{\partial z}\right) + c^{(n)}F \quad (22)$$

Левая часть равенства (22) может быть преобразована следующим образом:

$$c^{(n)}\frac{\partial c^{(n)}}{\partial t} + c^{(n)}\left(\frac{\partial\left(uc^{(n)}\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(vc^{(n)}\right)}{\partial y} + \frac{\partial\left(\left(w+w_g\right)c^{(n)}\right)}{\partial z}\right) = \frac{1}{2}\frac{\partial\left(c^{(n)}\right)^2}{\partial t} + c^{(n)}div\left(c^{(n)}\vec{U}\right) = \frac{1}{2}\frac{\partial\left(c^{(n)}\right)^2}{\partial t} + \frac{1}{2}div\left(\left(c^{(n)}\right)^2\vec{U}\right), \quad (23)$$

где $\vec{U} = \left\| u, v, w+w_g \right\|^T$.

С учетом (23) уравнение (22) запишется в виде

$$\frac{1}{2}\frac{\partial\left(c^{(n)}\right)^2}{\partial t} + \frac{1}{2}div\left(\left(c^{(n)}\right)^2\vec{U}\right) = \mu_h c^{(n)}\left(\frac{\partial^2 c^{(n)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c^{(n)}}{\partial y^2}\right) + c^{(n)}\frac{\partial}{\partial z}\left(\mu_\nu \frac{\partial c^{(n)}}{\partial z}\right) + c^{(n)}F. \quad (24)$$

Затем обе части уравнения (24) проинтегрируем по времени на интервале $t_{n-1} \le t \le t_n$ и, после этого — по пространственным переменным в области G_{n-1}. В первом слагаемом порядок интегрирования изменён в силу теоремы Фубини [19]. Получим

$$\iiint\limits_{G_{n-1}}\frac{1}{2}\left(\int\limits_{t_{n-1}}^{t_n}\frac{\partial\left(c^{(n)}\right)^2}{\partial t}dt\right)dG_{n-1} + \int\limits_{t_{n-1}}^{t_n}\frac{1}{2}\left(\iiint\limits_{G_{n-1}}div\left(\left(c^{(n)}\right)^2\vec{U}\right)dG_{n-1}\right)dt =$$
$$= \int\limits_{t_{n-1}}^{t_n}\left(\iiint\limits_{G_{n-1}}c^{(n)}\mu_h\left(\frac{\partial^2 c^{(n)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c^{(n)}}{\partial y^2}\right)dG_{n-1}\right)dt + \int\limits_{t_{n-1}}^{t_n}\left(\iiint\limits_{G_{n-1}}c^{(n)}\frac{\partial}{\partial z}\left(\mu_\nu\frac{\partial c^{(n)}}{\partial z}\right)dG_{n-1}\right)dt + \quad (25)$$
$$\int\limits_{t_{n-1}}^{t_n}\left(\iiint\limits_{G_{n-1}}c^{(n)}F dG_{n-1}\right)dt.$$

Первое слагаемое из левой части равенства (25), очевидно, равно

$$\iiint\limits_{G_{n-1}}\frac{1}{2}\left(\int\limits_{t_{n-1}}^{t_n}\frac{\partial\left(c^{(n)}\right)^2}{\partial t}dt\right)dG_{n-1} = \iiint\limits_{G_{n-1}}\frac{1}{2}\left(\left(c^{(n)}\right)^2(x,y,z,t_n) - \left(c^{(n)}\right)^2(x,y,z,t_{n-1})\right)dG_{n-1}. \quad (26)$$

Далее обратимся к преобразованию второго слагаемого левой части равенства (25). С учетом формулы Остроградского-Гаусса и граничных условий (18)−(20) его можно записать в виде [20]:

$$\int_{t_{n-1}}^{t_n}\left(\frac{1}{2}\iiint_{G_{n-1}} div\left(\left(c^{(n)}\right)^2\vec{U}\right)dG_{n-1}\right)dt=\frac{1}{2}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\left(\iint_{S_{1,n-1}}\left(c^*\right)^2\left(\overrightarrow{U^*},\vec{n}\right)dydz\right)dt+\frac{1}{2}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\left(\iint_{S_{6,n-1}}c^2w_g dxdy\right)dt+$$
$$+\int_{t_{n-1}}^{t_n}\left(\iint_{S_{3,n-1}}\left(c^*\right)^2\left(\overrightarrow{U^*},\vec{n}\right)dxdz\right)dt+\frac{1}{2}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\left(\iint_{S_{2,n-1}}\left(c^*\right)^2\left(\overrightarrow{U^*},\vec{n}\right)dxdz\right)dt=-\frac{1}{2}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\left(\iint_{S_{1,n-1}}\left(c^*\right)^2 udydz\right)dt- \quad (27)$$
$$-\frac{1}{2}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\left(\iint_{S_{3,n-1}}\left(c^*\right)^2 vdxdz\right)dt+\frac{1}{2}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\left(\iint_{S_{2,n-1}}\left(c^*\right)^2 vdxdz\right)dt+\frac{1}{2}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\left(\iint_{S_{6,n-1}}\left(c^{(n)}\right)^2 w_g dxdy\right)dt.$$

где $\overrightarrow{U^*}$ — известная скорость водной среды на гранях, где заданы граничные условия первого рода; фактически это все боковые грани, кроме $S_{4,n-1}$ и верхней крышки $S_{5,n-1}$, на которых концентрация взвеси равна нулю, потому и потоки через них равны нулю.

Обратимся к преобразованию правой части равенства (25). Имеет место равенство

$$\iiint_{G_{n-1}}\left[c^{(n)}\left(\mu_h\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial c^{(n)}}{\partial x}\right)+\mu_h\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial c^{(n)}}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\mu_v\frac{\partial c^{(n)}}{\partial z}\right)\right)\right]dG_{n-1}=$$
$$=\iiint_{G_{n-1}}\left[\mu_h\frac{\partial}{\partial x}\left(c^{(n)}\frac{\partial c^{(n)}}{\partial x}\right)+\mu_h\frac{\partial}{\partial y}\left(c^{(n)}\frac{\partial c^{(n)}}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(c^{(n)}\mu_v\frac{\partial c^{(n)}}{\partial z}\right)\right]dG_{n-1}- \quad (28)$$
$$-\iiint_{G_{n-1}}\left[\mu_h\left(\frac{\partial c^{(n)}}{\partial x}\right)^2+\mu_h\left(\frac{\partial c^{(n)}}{\partial y}\right)^2+\mu_v\left(\frac{\partial c^{(n)}}{\partial z}\right)^2\right]dG_{n-1}.$$

Пусть $\vec{Q}=\left\{Q_x,Q_y,Q_z\right\}=\left\{\mu_h c^{(n)}\frac{\partial c^{(n)}}{\partial x},\mu_h c^{(n)}\frac{\partial c^{(n)}}{\partial y},c^{(n)}\mu_v\frac{\partial c^{(n)}}{\partial z}\right\}$. Тогда в силу теоремы Остроградского-Гаусса имеем:

$$\iiint_{G_{n-1}}\left[\mu_h\frac{\partial}{\partial x}\left(c^{(n)}\frac{\partial c^{(n)}}{\partial x}\right)+\mu_h\frac{\partial}{\partial y}\left(c^{(n)}\frac{\partial c^{(n)}}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(c^{(n)}\mu_v\frac{\partial c^{(n)}}{\partial z}\right)\right]dG_{n-1}=\iiint_{G_{n-1}} div\vec{Q}dG=$$
$$=\iint_{S_{2,n-1}}Q_y dxdz+\iint_{S_{4,n-1}}Q_x dydz+\iint_{S_{3,n-1}}Q_y dxdz+\iint_{S_{1,n-1}}Q_x dydz+\iint_{S_{6,n-1}}Q_z dxdy+\iint_{S_{5,n-1}}Q_z dxdy= \quad (29)$$
$$=\iint_{S_{2,n-1}}Q_y dxdz+\iint_{S_{3,n-1}}Q_y dxdz+\iint_{S_{1,n-1}}Q_x dydz+\iint_{S_{6,n-1}}Q_z dxdy.$$

Преобразуя каждое слагаемое из правой части (29) с учетом условий на границе (18)−(20), получаем

$$\iiint_{G_{n-1}}\left[\mu_h\frac{\partial}{\partial x}\left(c^{(n)}\frac{\partial c^{(n)}}{\partial x}\right)+\mu_h\frac{\partial}{\partial y}\left(c^{(n)}\frac{\partial c^{(n)}}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(c^{(n)}\mu_v\frac{\partial c^{(n)}}{\partial z}\right)\right]dG_{n-1}=$$
$$=\iint_{S_{2,n-1}}c^*\mu_h\frac{\partial c^*}{\partial y}dxdz+\iint_{S_{3,n-1\,1}}c^*\mu_h\frac{\partial c^*}{\partial y}dxdz+\iint_{S_{1,n-1}}c^*\mu_h\frac{\partial c^*}{\partial x}dydz-\iint_{S_{6,n-1}}w_g\left(c^{(n)}\right)^2dxdy. \quad (30)$$

С учетом (26), (28), (29) и (30) равенство (25) принимает вид

$$\frac{1}{2}\iiint_{G_{n-1}}\left(c^{(n)}\right)^2\left(x,y,z,t_n\right)dG_{n-1}-\int_{t_{n-1}}^{t_n}\left(\iint_{S_{1,n-1}}\left(\frac{1}{2}\left(c^*\right)^2u+c^*\mu_h\frac{\partial c^*}{\partial x}\right)dydz\right)dt-$$
$$-\int_{t_{n-1}}^{t_n}\left(\iint_{S_{3,n-1}}\left(\frac{1}{2}\left(c^*\right)^2v+c^*\mu_h\frac{\partial c^*}{\partial y}\right)dxdz\right)dt+\int_{t_{n-1}}^{t_n}\left(\iint_{S_{2,n-1}}\left(\frac{1}{2}\left(c^*\right)^2v-c^*\mu_h\frac{\partial c^*}{\partial y}\right)dxdz\right)dt+$$
$$+\frac{3}{2}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\left(\iint_{S_{6,n-1}}w_g\left(c^{(n)}\right)^2dxdy\right)dt+\int_{t_{n-1}}^{t_n}\left[\iiint_{G_{n-1}}\left(\left(\frac{\partial c^{(n)}}{\partial x}\right)^2+\mu_h\left(\frac{\partial c^{(n)}}{\partial y}\right)^2+\mu_v\left(\frac{\partial c^{(n)}}{\partial z}\right)^2\right)dG_{n-1}\right]dt= \quad (31)$$
$$=\frac{1}{2}\iiint_{G_{n-1}}\left(c^{(n)}\right)^2\left(x,y,z,t_{n-1}\right)dG_{n-1}+\int_{t_{n-1}}^{t_n}\left(\iiint_{G_{n-1}}c^{(n)}FdG_{n-1}\right)dt.$$

Тождество (31) будет основным при исследовании единственности и получения априорной оценки нормы решения начально-краевой задачи (14)−(20). В случае замены граничного условия (20) на граничное условие (21), квадратичный функционал (31) изменяется следующим образом:

$$\frac{1}{2}\iiint\limits_{G_{n-1}}\left(c^{(n)}\right)^2(x,y,z,t_n)dG_{n-1}-\int\limits_{t_{n-1}}^{t_n}\left(\iint\limits_{S_{1,n-1}}\left(\frac{1}{2}\left(c^*\right)^2u+c^*\mu_h\frac{\partial c^*}{\partial x}\right)dydz\right)dt-$$
$$-\int\limits_{t_{n-1}}^{t_n}\left(\iint\limits_{S_{3,n-1}}\left(\frac{1}{2}\left(c^*\right)^2v+c^*\mu_h\frac{\partial c^*}{\partial y}\right)dxdz\right)dt+\int\limits_{t_{n-1}}^{t_n}\left(\iint\limits_{S_{2,n-1}}\left(\frac{1}{2}\left(c^*\right)^2v-c^*\mu_h\frac{\partial c^*}{\partial y}\right)dxdz\right)dt+$$
$$+\int\limits_{t_{n-1}}^{t_n}\left(\iint\limits_{S_{6,n-1}}\left(\frac{1}{2}w_g-\alpha\mu_v\right)\left(c^{(n)}\right)^2dxdy\right)dt+\int\limits_{t_{n-1}}^{t_n}\left[\iiint\limits_{G_{n-1}}\left(\left(\frac{\partial c^{(n)}}{\partial x}\right)^2+\mu_h\left(\frac{\partial c^{(n)}}{\partial y}\right)^2+\mu_v\left(\frac{\partial c^{(n)}}{\partial z}\right)^2\right)dG_{n-1}\right]dt=\tag{32}$$
$$=\frac{1}{2}\iiint\limits_{G_{n-1}}\left(c^{(n)}\right)^2(x,y,z,t_{n-1})dG_{n-1}+\int\limits_{t_{n-1}}^{t_n}\left(\iiint\limits_{G_{n-1}}c^{(n)}FdG_{n-1}\right)dt.$$

Предположим, что уравнению (14) с одними и теми же условиями (16)−(20) удовлетворяют два различных решения задачи $c_1=c_1(x,y,z,t)$, $c_2=c_2(x,y,z,t)$. Для их разности $\tilde{c}=c_1-c_2$ справедлива следующая начально-краевая задача:

$$\frac{\partial\tilde{c}}{\partial t}+\frac{\partial(u\tilde{c})}{\partial x}+\frac{\partial(v\tilde{c})}{\partial y}+\frac{\partial\left((w+w_g)\tilde{c}\right)}{\partial z}=\mu_h\left(\frac{\partial^2\tilde{c}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\tilde{c}}{\partial y^2}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\mu_v\frac{\partial\tilde{c}}{\partial z}\right),\tag{33}$$

$$\tilde{c}(x,y,z,0)=0,\ (x,y,z)\in\overline{G}_{n-1},\tag{34}$$

— на гранях $S_{1,n-1}$, $S_{2,n-1}$, $S_{3,n-1}$, $S_{4,n-1}$, $S_{5,n-1}$

$$\tilde{c}=c^*-c^*=0;\tag{35}$$

— на поверхности $S_{6,n-1}$

$$\frac{\partial\tilde{c}}{\partial z}=-\frac{w_g}{\mu_v}(c_1-c_2)=-\frac{w_g}{\mu_v}\tilde{c}.\tag{36}$$

Для функции $\tilde{c}$ равенство (33) примет вид с учетом равенств (34)−(36)

$$\frac{1}{2}\iiint\limits_{G_{n-1}}\tilde{c}^2(x,y,z,t_n)dG_{n-1}+\frac{3}{2}\int\limits_{t_{n-1}}^{t_n}\left(\iint\limits_{S_{6,n-1}}w_g\tilde{c}^2dxdy\right)dt+$$
$$+\int\limits_{t_{n-1}}^{t_n}\left[\iiint\limits_{G_{n-1}}\left[\mu_h\left(\frac{\partial\tilde{c}}{\partial x}\right)^2+\mu_h\left(\frac{\partial\tilde{c}}{\partial y}\right)^2+\mu_v\left(\frac{\partial\tilde{c}}{\partial z}\right)^2\right]dG_{n-1}\right]dt=0.\tag{37}$$

Поскольку $w_g>0$ и другие известные величины под знаком интегралов положительны $\mu_h>0$, $\mu_v>0$ то равенство (36) выполняется лишь при условии

$$\tilde{c}(x,y,z,t)\equiv0,\quad(x,y,z)\in G_{n-1},\quad t_{n-1}<t\le t_n,\tag{38}$$

что и завершает доказательство единственности решения начально-краевой задачи (14)−(20).

В случае замены граничного условия (20) на соотношение (21) получаем вместо выражения (37) равенство вида

$$\frac{1}{2}\iiint\limits_{G_{n-1}}\tilde{c}^2(x,y,z,t_n)dG_{n-1}+\int\limits_{t_{n-1}}^{t_n}\left(\iint\limits_{S_{6,n-1}}\left(\frac{1}{2}w_g-\alpha\mu_v\right)\tilde{c}^2dxdy\right)dt+$$
$$+\int\limits_{t_{n-1}}^{t_n}\left[\iiint\limits_{G_{n-1}}\left[\mu_h\left(\frac{\partial\tilde{c}}{\partial x}\right)^2+\mu_h\left(\frac{\partial\tilde{c}}{\partial y}\right)^2+\mu_v\left(\frac{\partial\tilde{c}}{\partial z}\right)^2\right]dG_{n-1}\right]dt=0.\tag{39}$$

Потребуем выполнения неравенства

$$\frac{1}{2}w_g-\alpha\mu_v\ge0,\quad(x,y,z)\in S_{6,n-1},\quad t_{n-1}<t\le t_n$$

или

$$\alpha\le\frac{w_g}{2\mu_v},\quad(x,y,z)\in S_{6,n-1},\quad t_{n-1}<t\le t_n,\tag{40}$$

тогда все слагаемые в равенстве (39) неотрицательны и равенство нулю возможно тогда и только тогда, когда $\tilde{c}(x,y,z,t)\equiv0,\quad(x,y,z)\in G_{n-1},\quad t_{n-1}<t\le t_n,$ что и означает единственность решения и в этом случае.

Рассуждения аналогичным образом повторяются для всех слоев временной сетки ω_τ. Изменение граничных условий, связанное с непрерывным изменением рельефа дна в зависимости от временной переменной требует дополнительного исследования и выходит за рамки данной статьи.

Теорема. Пусть дана система уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial c^{(n)}}{\partial t}+\dfrac{\partial\left(uc^{(n)}\right)}{\partial x}+\dfrac{\partial\left(vc^{(n)}\right)}{\partial y}+\dfrac{\partial\left(\left(w+w_g\right)c^{(n)}\right)}{\partial z}=\mu_h\left(\dfrac{\partial^2 c^{(n)}}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 c^{(n)}}{\partial y^2}\right)+\dfrac{\partial}{\partial z}\left(\mu_v\dfrac{\partial c^{(n)}}{\partial z}\right)+F, \\ (x,y,z)\in G_{n-1}, \quad G_{n-1}=\left\{0<x<L_x,\,0<y<L_y,\,0<z<H^{n-1}\left(x,y,t_{n-1}\right)\right\}, \\ H^{(n)}=H^{(n-1)}-\dfrac{\varepsilon}{\rho}w_g\sum\limits_{n=1}^{N}\int\limits_{t_{n-1}}^{t_n}c^{(n)}dt, \quad n=1,2,...,N \end{cases}$$

в односвязной области $\Omega_{n-1}=G_{n-1}\times\left(t_{n-1}<t<t_n\right)$, $G_{n-1}=\left(0<x<L_x, 0<y<L_y, 0<z<H^{(n-1)}\left(x,y,t_{n-1}\right)\right)$, с достаточно гладкой границей, определяемой гладкостью функции $z=H^{(n-1)}(x,y)$, $0\le x\le L_x$, $0\le y\le L_y$ с начальными и граничными условиями (16)−(20). Пусть функции решения $c^{(n)}\left(x,y,z,t_{n-1}\right)$, вектора скорости водной среды $\left\|u,v,w+w_g\right\|^T$, начального условия $c^{(n-1)}\left(x,y,z,t_{n-1}\right)$, правой части $F(x,y,z,t)$, граничного условия $c^*(x,y,z,t)$, коэффициента вертикального турбулентного обмена $\mu_v=\mu_v(z)$, $(x,y,z)\in G_{n-1}$ удовлетворяют следующим условиям гладкости: $c^{(n)}\left(x,y,z,t_{n-1}\right)\in C^2\left(\Omega_{n-1}\right)\cap C\left(\bar\Omega_{n-1}\right)$, $grad\,c^{(n)}\in C\left(\bar\Omega_{n-1}\right)$, $\left\|u,v,w+w_g\right\|^T\in C^1\left(\Omega_{n-1}\right)\cap C\left(\bar\Omega_{n-1}\right)$, $c^{(n-1)}\left(x,y,z,t_{n-1}\right)\in C\left(\bar G_{n-1}\right)$, $F(x,y,z,t)\in C\left(\Omega_{n-1}\right)$, $\mu_v(x,y,z)\in C^1\left(G_{n-1}\right)\cap C\left(\bar G_{n-1}\right)$, $c^*(x,y,z,t)\in C\left(S_{n-1}\right)\times\left[t_{n-1}\le t\le t_n\right]$, $S_{n-1}=\bar G_{n-1}\setminus G_{n-1}$, $\dfrac{\partial c^*}{\partial n}\in C\left(\left(0\le x\le L_x,\quad 0\le y\le L_y,\quad z=H^{(n-1)}(x,y)\right)\times\left[t_{n-1}\le t\le t_n\right]\right)$, а также условиям согласованности граничных и начальных условий $c^*(x,y,z,0)=c_0(x,y,z)$, $(x,y,z)\in S_{n-1}\setminus\left(0<x<L_x, 0<y<L_y,\quad z=H^{(n-1)}(x,y)\right)$, $\dfrac{\partial c_0}{\partial z}=-\dfrac{\mu_v}{w_g}c^*$, $\left(0<x<L_x, 0<y<L_y,\quad z=H^{(n-1)}(x,y)\right)$, тогда решение данной задачи существует и единственно.

Замечание. В случае замены граничного условия (20) на граничное условие (21), в качестве достаточного условия выполнения предыдущей теоремы следует добавить неравенство (40).

Исследование непрерывной зависимости решений начально-краевой задачи транспорта взвеси от начальных, граничных условий и функции правой части. Следующий этап связан с исследованием непрерывной зависимости решения от функций правой части, граничных и начальных условий для системы (14)–(15).

Будем предполагать, что

$$\begin{gathered} c^*\ge c_0^*\equiv const>0, \\ 0\le x\le L_x,\ 0\le y\le L_y,\ 0<z<H^{(n)}\left(x,y,t_{n-1}\right),\ t_{n-1}\le t\le t_n. \end{gathered} \tag{41}$$

Введем для удобства обозначения: объединение всех частей боковой цилиндрической поверхности (границы области G_{n-1}) обозначим как $S_{c,n-1}$, а нижнее основание области G_{n-1} – $S_{b,n-1}$. В силу условий гладкости, перечисленных в условиях вышеупомянутой теоремы, достигаются экстремумы функций на ограниченных замкнутых множествах:

$$\begin{gathered} M_{1,n-1}\equiv\max_{\Omega_{n-1}}\left\{\left|c^{(n)}\right|\right\},\quad M_{2,n-1}\equiv\max_{S_{n-1}}\left\{\left|\frac{\partial c^{(n)}}{\partial x}\right|,\left|\frac{\partial c^{(n)}}{\partial y}\right|\right\}, \\ M_{3,n-1}\equiv\max_{S_{c,n-1}}\left\{\mu_h\right\},\quad M_{4,n-1}\equiv\max_{S_{c,n-1}\times\left[t_{n-1}\le t\le t_n\right]}\left\{|u|,|v|\right\},\quad M_{5,n-1}\equiv\min_{\bar G_{n-1}}\left\{\mu_h,\mu_v\right\}. \end{gathered} \tag{42}$$

Будем ориентироваться на уравнение (31), если используется граничное условие (20), и равенство (32) — в случае граничного условия (21). Привлекая неравенство Фридрихса, имеем цепочку неравенств:

$$\iiint\limits_{G_{n-1}}\left(\mu_h\left(\frac{\partial c^{(n)}}{\partial x}\right)^2+\mu_h\left(\frac{\partial c^{(n)}}{\partial y}\right)^2+\mu_v\left(\frac{\partial c^{(n)}}{\partial z}\right)^2\right)dG_{n-1}\geq$$
$$\geq\min_{G_{n-1}}\{\mu_h,\mu_v\}\iiint\limits_{G_{n-1}}\left(\left(\frac{\partial c^{(n)}}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial c^{(n)}}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial c^{(n)}}{\partial z}\right)^2\right)dG_{n-1}\geq \quad (43)$$
$$\geq M_{5,n-1}\left(\pi^2\left(\frac{1}{L_x^{\,2}}+\frac{1}{L_y^{\,2}}+\frac{1}{\left(H^{(n-1)}\right)^2}\right)\right)\iiint\limits_{G_{n-1}}\left(c^{(n)}\right)^2dG_{n-1}.$$

Обратимся к уравнению (26), из которого в силу (42) и (43) получим неравенство:

$$\iiint\limits_{G_{n-1}}\left(c^{(n)}\right)^2dG_{n-1}+2M_{5,n-1}\left(\pi^2\left(\frac{1}{L_x^{\,2}}+\frac{1}{L_y^{\,2}}+\frac{1}{\left(H^{(n-1)}\right)^2}\right)\right)\int\limits_{t_{n-1}}^{t_n}\left(\iiint\limits_{G_{n-1}}\left(c^{(n)}\right)^2dG_{n-1}\right)dt+$$
$$+3\int\limits_{t_{n-1}}^{t_n}\left(\iint\limits_{S_{b,n-1}}w_g\left(c^{(n)}\right)^2dxdy\right)dt\leq\iiint\limits_{G_{n-1}}c_0^{\,2}dG_{n-1}+M_{4,n-1}\int\limits_{t_{n-1}}^{t_n}\left(\iint\limits_{S_{c,n-1}}\left(c^*\right)^2dS_{n-1}\right)dt+ \quad (44)$$
$$+2M_{2,n-1}M_{3,n-1}\int\limits_{t_{n-1}}^{t_n}\left(\iint\limits_{S_{c,n-1}}\left|c^*\right|dS_{n-1}\right)dt+2M_{1,n-1}\int\limits_{t_{n-1}}^{t_n}\left(\iiint\limits_{G_{n-1}}|F|\,dG_{n-1}\right)dt.$$

Из неравенства (44) следуют два неравенства

$$\iiint\limits_{G_{n-1}}\left(c^{(n)}\right)^2dG_{n-1}\leq\iiint\limits_{G_{n-1}}c_0^{\,2}dG_{n-1}+M_{4,n-1}\int\limits_{t_{n-1}}^{t_n}\left(\iint\limits_{S_{c,n-1}}\left(c^*\right)^2dS_{n-1}\right)dt+$$
$$+2M_{2,n-1}M_{3,n-1}\int\limits_{t_{n-1}}^{t_n}\left(\iint\limits_{S_{c,n-1}}\left|c^*\right|dS_{n-1}\right)dt+2M_1\int\limits_{t_{n-1}}^{t_n}\left(\iiint\limits_{G_{n-1}}|F|\,dG_{n-1}\right)dt. \quad (45)$$

и

$$\iiint\limits_{G_{n-1}}\left(c^{(n)}\right)^2dG_{n-1}\leq M_{6,n-1}\left(\iiint\limits_{G_{n-1}}c_0^{\,2}dG_{n-1}+\right.$$
$$\left.+M_{4,n-1}\int\limits_{t_{n-1}}^{t_n}\left(\iint\limits_{S_{c,n-1}}\left(c^*\right)^2dS_{n-1}\right)dt+2M_{2,n-1}M_{3,n-1}\int\limits_{t_{n-1}}^{t_n}\left(\iint\limits_{S_{c,n-1}}\left|c^*\right|dS_{n-1}\right)dt+2M_{1,n-1}\int\limits_{t_{n-1}}^{t_n}\left(\iiint\limits_{G_{n-1}}|F|\,dG_{n-1}\right)dt\right). \quad (46)$$

где $M_{6,n-1}=\dfrac{1}{2M_{5,n-1}}\left(\pi^2\left(\dfrac{1}{L_x^{\,2}}+\dfrac{1}{L_y^{\,2}}+\dfrac{1}{\left(H^{(n-1)}\right)^2}\right)\right)^{-1}$.

Из полученных неравенств следует непрерывная зависимость (устойчивость) решения задачи (14)−(20) от функций: начального условия, граничных условий и правой части, в норме L_2 для любого момента времени $0<T<+\infty$, а также в интегральной по времени норме L_2.

Очевидно, что при выполнении неравенства (45) и условий теоремы начально-краевая задача (14)−(19), (20) также будет иметь решение, непрерывным образом зависящее от функций: начального условия, граничных условий и правой части в соответствующих нормах.

Обсуждение и заключения. Новизна предложенной нестационарной пространственно-трехмерной математической модели транспорта взвесей состоит в том, что наряду с учетом процессов адвективного переноса, микротурбулентной диффузии и гравитационного осаждения частиц взвеси модель описывает изменение геометрии дна, вызванное осаждением частиц взвеси или подъемом частиц донных отложений. Выполнена линеаризация соответствующей начально-краевой задачи на временной сетке и получены для произвольного временного шага $t_{n-1}\leq t\leq t_n$ условия единственности решения начально-краевой задачи и непрерывной зависимости от входных данных — от функций начального условия, граничных условий и правой части в норме гильбертова пространства L_2 в интегральной по времени норме L_2 для двух вариантов граничных условий.

Библиографический список

1. Прибрежная динамика : волны, течения потоки наносов / И. О. Леонтьев [и др.]; под ред. И. О. Леонтьева. — Москва : ГЕОС, 2001. — 272 с.

2. Природные катастрофы в Азово-Черноморском бассейне в начале XXI века / Г. Г. Матишов [и др.]. — Ростов-на-Дону : изд-во ЮНЦ РАН, 2017. — 160 с.

3. Петров, П. Г. Движение сыпучей среды в придонном слое жидкости / П. Г. Петров // Прикладная механика и техническая физика. — 1991. — Т. 32, № 5. — С. 72–75.

4. Barnard, P.L. A multi-discipline approach for understanding sediment transport and geomorphic evolution in an estuarine-coastal system—San Francisco Bay / P.L. Barnard, B.E. Jaffe, and D.H. Schoellhamer // Marine Geology. Marine Geology. – 2013. Vol. 345. P. 1–2. DOI: https://doi.org/10.1016/j.margeo.2013.09.010

5. Xiaoying, L. Predictive modeling in sediment transportation across multiple spatial scales in the Jialing River Basin of China / L. Xiaoying, Q. Shi, H. Yuan, C. Yuehong, D. Pengfei // International Journal of Sediment Research. – 2015. – Vol. 30, iss. 3. – P. 250–255.

6. Lusher, A.L. Occurrence of microplastics in gastrointestinal tract of pelagic and demersal fish from the English channel / A.L. Lusher, M. McHugh, R.C. Thompson // Marine Pollution Bulletin. – 2013. – Vol. 67. – P. 94-99.

7. Математические модели в геофизической гидродинамике и численные методы их реализации / Г. И. Марчук [и др.]. — Ленинград : Гидрометеоиздат, 1987. — 296 с.

8. Беликов, В. В. Математическая модель транспорта наносов для расчета заносимости дноуглубительных прорезей и русловых карьеров / В. В. Беликов, Н. М. Борисова, Г. Л. Гладков // Журнал университета водных коммуникаций. — 2010.— Т. 2.— С. 105–113.

9. Sanne, L.N. Modelling of sand dunes in steady and tidal flow / L.N Sanne // Denmark: Technical University of Copenhagen. – 2003. – 185 p.

10. Ballent, A. Modelled transport of benthic marine microplastic pollution in the Nazaré Canyon / A. Ballent, S. Pando, A. Purser, M. Juliano, L. Thomsen// Biogeosciences. – 2013. – Vol. 10. – P. 7957-7970. https://doi.org/10.5194/bg-10-7957-2013

11. Miles, J. Wave shape effects on sediment transport / J. Miles, J. // J. Coastal Res. – 2013. – Vol. 2, iss. 65. – P. 1803–1808. DOI: https://doi.org/10.2112/SI65-305.1

12. Попков, В. И. Структурные особенности и генезис дислокаций дна Азовского моря / В. И. Попков // Геология, география и глобальная энергия. — 2008. — № 1. — С. 77–90.

13. Сидорякина, В. В. Исследование корректности и численная реализация линеаризованной двумерной задачи транспорта наносов / В. В. Сидорякина, А. И. Сухинов // Журнал вычислительной матем. и матем. физ. — 2017. — Т. 57, № 6.— С. 985–1002. — DOI: https://doi.org/10.7868/S0044466917060138

14. Сухинов, А. И. О сходимости решения линеаризованной последовательности задач к решению нелинейной задачи транспорта наносов / А. И. Сухинов, В. В. Сидорякина // Математическое моделирование. — 2017. — Т. 29, № 11. — С. 19–39. http://mi.mathnet.ru/mm3905

15. Сухинов, А. И. Достаточные условия сходимости положительных решений линеаризованной двумерной задачи транспорта наносов / А. И. Сухинов, В. В. Сидорякина, А. А. Сухинов // Вестник Дон. гос. техн. ун-та. — 2017. — Т. 17, № 1. — С. 5–17. DOI: https://doi.org/10.23947/1992-5980-2017-17-1-5-17

16. Sukhinov, A.A. 3D Model of Diffusion-Advection-Aggregation Suspensions in Water Basins and Its Parallel Realization / A.A. Sukhinov, A.I. Sukhinov // Parallel Computational Fluid Dynamics, Mutidisciplinary Applications, Proceedings of Parallel CFD 2004 Conference, Las Palmas de Gran Canaria, Spain, ELSEVIER, Amsterdam-Berlin-London-New York-Tokyo. – 2005. – P. 223-230. DOI: https://doi.org/10.1016/B978-044452024-1/50029-4

17. Protter, M.H. Maximum Principles in Differential Equation / M.H. Protter, H.F. Weinberger // Springer-Verlag New York, Inc. – 1984. – 276 p. DOI https://doi.org/10.1007/978-1-4612-5282-5

18. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа / О. А. Ладыженская [и др.]. — Москва : Наука, 1967. — 736 с.

19. Уравнения математической физики / В. С. Владимиров [и др.]. — Москва : Наука, 1981.— 512 с.

20. Уравнения математической физики / А. Н. Тихонова [и др.]. — Москва : Наука, 1977. — 735 с.

Поступила в редакцию 18.06 .2018
Сдана в редакцию 19.06.2018
Запланирована в номер 05.09.2018

Received 18.06 .2018
Submitted 19.06.2018
Scheduled in the issue 05.09.2018

Об авторах:

Сухинов Александр Иванович,
заведующий кафедрой «Математика и информатика» Донского государственного технического университета, (РФ, 344000, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1),
доктор физико-математических наук, профессор,
ORCID: http://orcid.org/0000-0002-5825-1523
ScopusAuthorID: 8573972700,
WoSResearcherID: I-1091-2016,
sukhinov@gmail.com

Сидорякина Валентина Владимировна,
заведующая кафедрой «Математика» Таганрогского института имени А.П. Чехова (филиал) РГЭУ (РИНХ), (РФ, 347936, г. Таганрог, ул. Инициативная, 48),
кандидат физико-математических наук, доцент,
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-7744-015X
cvv9@mail.ru

Authors:

Sukhinov, Alexander I.,
head of the Mathematics and Computer Sciences Department, Don State Technical University
(1, Gagarin sq., Rostov-on-Don, 344000, RF),
Dr.Sci. (Phys.-Math.), professor,
ORCID: http://orcid.org/0000-0002-5825-1523
ScopusAuthorID: 8573972700,
WoSResearcherID: I-1091-2016,
sukhinov@gmail.com

Sidoryakina,Valentina V.,
head of the Mathematics Department, Taganrog Chekhov Institute, Rostov State University of Economics (RINH) branch, (48, Initsiativnaya St., Taganrog, 347936, RF),
Cand.Sci. (Phys.-Math.), associate professor,
https://orcid.org/0000-0001-7744-015X
cvv9@mail.ru